

# ПРИНЦИП РЕАЛИЗАЦИИ СПЛАЙНОВОГО ИНТЕРПОЛЯТОРА СИСТЕМЫ ЧПУ

Аспирант, Обухов А.И.

МГТУ «Станкин»

*Работа выполнена по Госконтракту № 14.740.11.0541 на проведение НИР в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.*

Многие системы ЧПУ позволяют описывать траекторию перемещения инструмента только в виде последовательности отрезков прямых и дуг окружностей. Это имеет ряд недостатков, а именно:

- Жесткая динамика движения из-за резких изменений направления и, как следствие, ухудшение качества обрабатываемой поверхности и износ станка.
- Отклонение от требуемой геометрии поверхности вследствие использования линейных перемещений на криволинейных участках.
- Уменьшение производительности (уменьшение средней скорости и увеличение пути, проходимого инструментом).

Выходом из ситуации является использование интерполяции движения по осям с помощью сплайнов. Сплайн представляет собой метод математического описания кривой. Наиболее простые типы сплайнов описываются кубическими многочленами. Это Акима-сплайны, натуральные кубические сплайны [1]. В системах CAD/CAM для описания кривых и плоскостей используются NURBS – сплайны [2]. Такой способ описания кривых и плоскостей также используется в стандарте STEP для обмена данными математических моделей. Реализация сплайновых интерполяторов в дорогих системах ЧПУ общего назначения является закрытой и зачастую многие производители дешевых отечественных систем ЧПУ (как коммерческих, так и учебных) сталкиваются с трудностями при реализации поддержки сплайнов. Таким образом, весьма актуальной является задача описания методики реализации интерполяторов данного типа. На решение этой задачи направлена данная работа.

В качестве примера рассмотрим реализацию интерполятора, обрабатывающего Акима-сплайны. А-сплайн представляет собой простейший вид кубического сплайна, описываемого следующим выражением:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \quad (1)$$

Коэффициенты А, В, С, D определяются следующими условиями:

$$\begin{cases} y_i = Ax_i^3 + Bx_i^2 + Cx_i + D \\ y_{i+1} = Ax_{i+1}^3 + Bx_{i+1}^2 + Cx_{i+1} + D \\ 3Ax_i^2 + 2Bx_i + C = \frac{1}{d_{i-1} + d_i} \left( \frac{(y_i - y_{i-1})d_i}{d_{i-1}} + \frac{(y_{i+1} - y_i)d_{i-1}}{d_i} \right) \\ 3Ax_{i+1}^2 + 2Bx_{i+1} + C = \frac{1}{d_i + d_{i+1}} \left( \frac{(y_{i+1} - y_i)d_{i+1}}{d_i} + \frac{(y_{i+2} - y_{i+1})d_i}{d_{i+1}} \right) \end{cases}, \quad (2)$$

где:  $d_{i-1} = x_i - x_{i-1}$ ,  $d_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $d_{i+1} = x_{i+2} - x_{i+1}$

В параметрическом виде сплайн представляется группой выражений (1) и (2), где  $x$  заменяется на параметр  $t$ , а  $y$  – на координату по каждой оси. Параметрическое представление позволяет использовать А-сплайн для описания не только плоских, но и пространственных кривых.

Как следует из приведенного выражения (2), Akima-сплайн обеспечивает непрерывность только первой производной в точках, что несколько ограничивает применение данного типа интерполяции. Существуют другие типы кубических сплайнов, для которых параметры А, В, С, D определяются так, чтобы обеспечить непрерывность производных высших порядков [3].

Интерполятор системы ЧПУ выполняет две функции – подготовку данных для интерполяции и собственно интерполяцию траектории (то есть циклическое вычисление приращений координат по осям на основе заданного блоком разгона-торможения приращения пути).

Подготовка данных для интерполяции перемещения по кубическому сплайну (и вообще, для любых типов траекторий, заданных в параметрическом виде) состоит из двух этапов:

1. Нахождение всех неизвестных коэффициентов кривой (в данном случае А, В, С, D).
2. Нахождение длины кривой, начальных и конечных производных, максимальной кривизны (эти параметры нужно вычислять до интерполяции для того, чтобы блок разгона-торможения мог соблюсти условия на предельные ускорения по осям при задании начальной, максимальной и конечной скорости в кадре).

Нахождение коэффициентов, производных и кривизны находится элементарно из выражений (1) и (2) (о нахождении кривизны кривой см. [4]). Однако длина сегмента кубической кривой не может быть выражена в элементарных функциях, так как ее выражение представляет собой эллиптический интеграл (3):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (3)$$

Подставив выражение кубического сплайна в параметрическом виде и его производные в (3), можно убедиться, что получившийся интеграл – не берется в элементарных функциях.

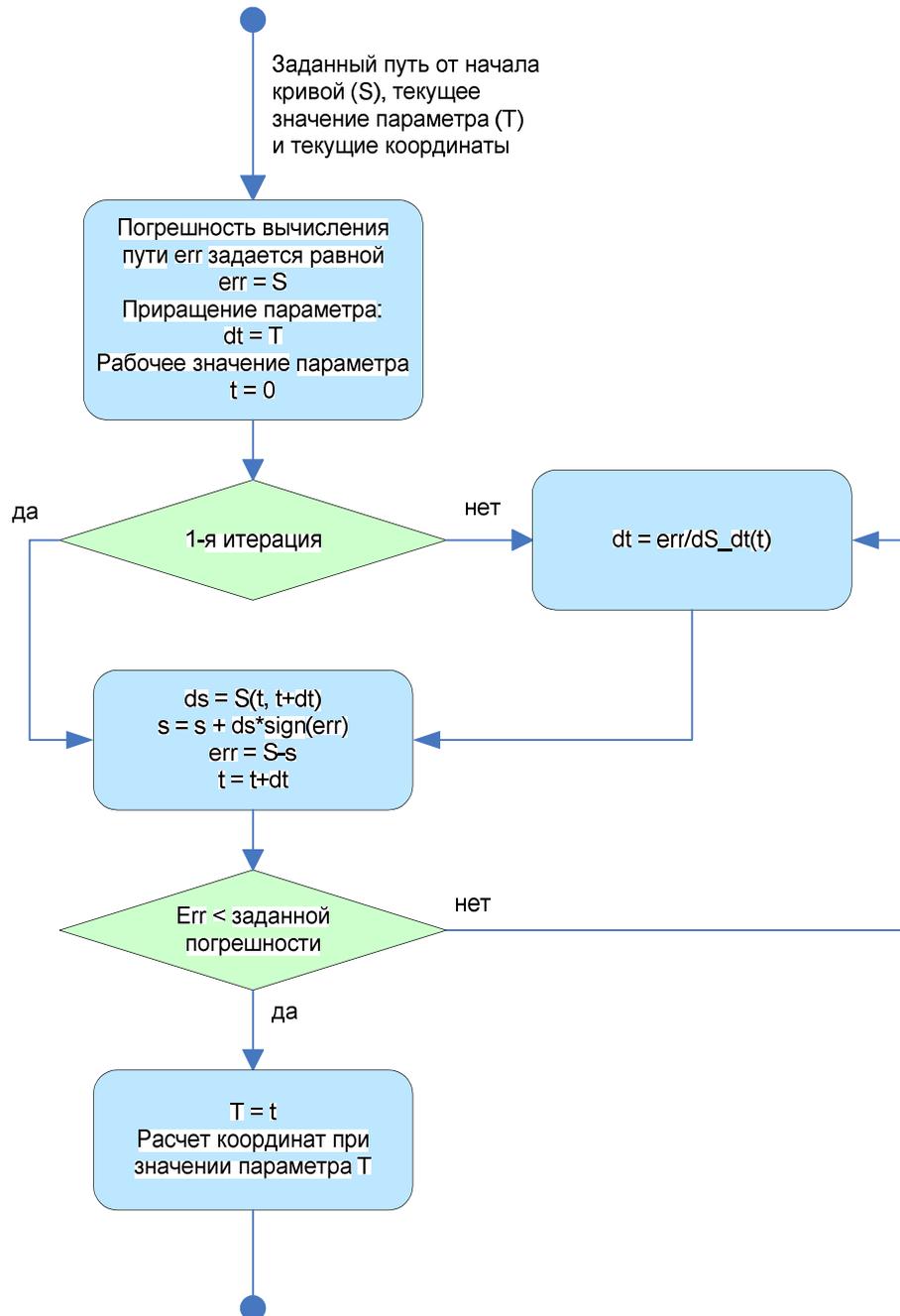
Таким образом, длину сегмента сплайна необходимо находить с помощью численного интегрирования. Для кубических кривых достаточно эффективно используется формула парабол (Симпсона). Следует заметить, что для задачи управления движением длину нужно находить с заданной точностью (не более 1 дискреты), что требует использования методов оценки точности численного интегрирования. Априорные методы оценок не подходят из-за сложностей нахождения экстремумов для производных высших порядков выражения (3) и других проблем. Ввиду этого для оценки и коррекции результата численного интегрирования в нашем случае применяется апостериорный метод Рунге [3]. Данный метод, как оказалось, достаточно удобен для программной реализации. Состоит метод Рунге в последовательном двукратном наращивании количества узлов, по которым вычисляется интеграл (то есть увеличении “густоты” сетки) и оценке погрешности на основе полученных данных. В простейшем случае это выглядит так: два значения интеграла, полученные при количестве узлов  $n$  и  $2n$ , используются для оценки погрешности интегрирования и коррекции полученного значения по формуле (4).

$$z = z_{2n} + \frac{z_{2n} - z_n}{2^p - 1} \quad (4)$$

где  $p$  – порядок точности метода интегрирования (равен 4 для формулы парабол),  $z_{2n}$  и  $z_n$  – значения интеграла, полученные при количестве узлов  $2n$  и  $n$  соответственно,  $z$  – уточненное значение интеграла. Второе слагаемое в правой части (4) представляет собой апостериорную оценку погрешности результата. Если погрешность меньше заданной, то  $z$  принимается за окончательное значение интеграла, в противном случае количество узлов увеличивается в два раза и погрешность считается уже по значениям при количестве узлов  $2n$  и  $4n$ , и т.д.

Алгоритм интерполяции (расчета приращений координат при заданном приращении пути) тесно связан с вычислением длины сплайна. Чтобы найти координаты точки сплайна, в которую надо переместиться за такт интерполяции, требуется вычислить, какая точка отстоит от текущей по длине сплайна на заданный путь перемещения за такт. То есть, если задан путь, требуется определить, в какую точку мы попадем при пересечении этого пути по сплайновой кривой. В случае параметрического представления эта задача сводится к поиску приращения параметра, соответствующего требуемому приращению пути. В ходе практической реализации сплайнового интерполятора для системы ЧПУ WinPCNC [5] был сделан вывод, что наилучшим способом решения данной задачи

является применение алгоритма итеративного приближения к заданной точке, схема которого показана на рис. 1.



**Рис. 1 Алгоритм интерполяции для параметрических кривых.**

В начале задается путь  $S$  от начала кадра, который должен быть пройден к моменту завершения текущего такта интерполяции, текущее значение параметра  $T$  (соответствующее точке начала текущего такта) и текущие координаты. Задача состоит в поиске точки, соответствующей

перемещению  $S$  по заданной кривой от начала кадра. В каждом такте положение заданной точки ищется именно относительно начала кадра, чтобы избежать накопления ошибки (а при миллионах тактов интерполяции на кадр никакая точность вычислений не позволит избежать появления ошибок к концу кадра).

Расчет координат заданной точки выглядит следующим образом:

1. Задаются несколько переменных:
  - $s$  – путь от начала кадра до точки, приближенной к заданной.
  - переменная  $err = S-s$ , которая определяет разность между требуемой длиной пути  $S$  и полученной в ходе поиска  $s$  ( $s = 0$  в начале алгоритма).
  - Приращение параметра  $dt$  (задается равным  $T$  в начале)
  - Значение параметра  $t$ , соответствующее значению длины  $s$
2. Вычисляется приращение параметра  $dt$ , приблизительно соответствующее приращению, равному ошибке пути  $err$ .  $dt$  вычисляется как отношение  $err$  к производной пути по параметру в точке  $t$
3. Вычисляется:
  - приращение пути  $ds$ , соответствующее приращению параметра  $dt$
  - путь  $s$
  - ошибка пути  $err$
4. Если  $err$  меньше заданной погрешности, текущее значение параметра принимается равным  $t$  и координаты конца такта интерполяции вычисляются исходя из этого значения. В противном случае происходит переход к пункту 2.

Таким образом, итеративно значение  $t$  приближается к такому, которое соответствует длине кривой от начала кадра, равной заданной длине  $S$  с допустимой погрешностью. Как правило, для достижения заданной точности достаточно 2-3 итераций.

Описанный алгоритм подходит для реализации интерполятора, использующего не только сплайны, но и любые гладкие кривые, заданные в параметрическом виде.

### Библиографический список

1. Мартинов Г. М., Сосонкин В. Л. Проблемы использования сплайновой интерполяции в системах ЧПУ при обработке скульптурных поверхностей // Автоматизация в промышленности. 2006. №11. С. 3–9.
2. Ли Кунву. «Основы САПР(CAD/CAM/CAE)», СПб.: Питер, 2004.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В. «Численные методы в примерах и задачах», М.: Высшая школа, 2004.
4. Кудрявцев Л.Д. «Математический анализ».
5. <http://www.ncsystems.ru>